ÉCOLE NATIONALE DU GÉNIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 2001

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES B

FILIERE PHYSIQUE CHIMIE

DURÉE : 2 heures 30

N.B. : Ce *sujet comporte 3 pages de texte*

Les calculatrices sont interdites

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On désigne par F l'ensemble des fonctions réelles f définies et continues sur [0, + ∞[et telles que $t \to e^{-t}(f(t))^2$ est intégrable.

On note E le **R**-espace vectoriel des fonctions polynômiales réelles définies sur [0, +∞[et, pour tout n de **N**, E_n le sous-espace de E formé par les fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n.

On pose, pour tout n de N,

$$\varphi_n : [0,+\infty[\to R \quad \text{et} \quad L_n : [0,+\infty[\to R$$
$$t \mapsto t^n e^{-t} \qquad\qquad t \mapsto e^t \varphi_n^{(n)}(t)$$

où $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de φ_n.

I. **Première partie**

1) Soit (f, g) ∈ F². Montrer que $e^{-t} f(t)\, g(t)$ est intégrable.

2) Etablir que F est un R-espace vectoriel et que

(f, g) → (f | g) = $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\, g(t)\, dt$ est un produit scalaire sur F.

Dans la suite, on notera || || la norme euclidienne associée.

3) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de F.

4) Soit n ∈ **N**. Montrer que L_n est un élément de E ; on précisera le degré de L_n et le coefficient $a_{n,k}$ de t^k dans l'expression de L_n.

Expliciter L_0 et L_1 ; montrer que pour k < n $\varphi_n^{(k)}(0) = 0$.

5) Calculer, pour tout n et m de **N**, (L_n | L_m) (on pourra utiliser des intégrations par parties).

6) En déduire que, pour tout n de **N**, la famille $\left(\frac{1}{k!} L_k\right)_{0 \le k \le n}$ est une base orthonormale de E_n.

7) Soit n ∈ **N** et P_n définie par :

$$\forall t \in [0,+\infty[\qquad P_n(t) = L_{n+2}(t) + (t - 2n - 3) L_{n+1}(t)$$

a) Montrer que $P_n \in E_n$.

b) Etablir : $\forall n \ge 1 \qquad \forall k \in \{0,\ldots,n-1\}$ (P_n | L_k) = 0.

c) En déduire, pour tout n de **N** :

$$\forall t \in [0,+\infty[\qquad L_{n+2}(t) + (t - 2n - 3) L_{n+1}(t) + (n+1)^2 L_n(t) = 0.$$

II. Deuxième partie

Pour tout réel a, on définit f_a par : $\forall t \in [0,+\infty[\quad f_a(t) = e^{-at}$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f_a soit un élément de F.

Dans la suite du problème, on suppose que $f_a \in F$.

2) Soit $n \in \mathbf{N}$.

a) Montrer que, pour tout $k \in N$, $(L_k \mid f_a) = k! \dfrac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$.

b) En déduire l'expression du projeté orthogonal de f_a sur E_n, noté $S_{n,a}$, en fonction des L_k.

c) Calculer $\| S_{n,a} \|^2$.

d) En déduire que la suite $(S_{n,a})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers f_a dans F muni de $\| \quad \|$.

3) Soit $\lambda \in [0,+\infty[$, λ fixé. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{L_n(\lambda)}{n!} x^n$. On note R_λ son rayon de convergence et G_λ sa somme.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad |L_n(\lambda)| \leq n! \ (1+\lambda)^n$.

b) En déduire que $R_\lambda > 0$.

Dans la suite du problème, on admet que $R_\lambda = 1$.

c) En utilisant la relation du I.7)c), montrer que G_λ est solution sur]-1,1[de l'équation différentielle

$$(E_\lambda) \ : \ (1-x)^2 y' - (1-x-\lambda) y = 0.$$

d) Résoudre (E_λ) sur]-1,1[et en déduire l'expression de G_λ.

4) En utilisant ce qui précède, démontrer que la suite de fonctions $(S_{n,a})_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers f_a.

III. **Troisième partie**

Dans toute cette partie, n désigne un élément fixé de **N**.

1) a) Etablir : $\forall t \in [0,+\infty[\quad L_{n+1}(t) = t\ L_n'(t) + (n+1-t)L_n(t)$. (On pourra remarquer que $\varphi_{n+1}(t) = t\varphi_n(t)$).

b) En utilisant la relation du I.7)c) et ce qui précède, montrer que L_n est une solution sur [0,+∞[de l'équation différentielle (ε_n) : $tz''+(1-t)z'+nz = 0$.

2) Soit Z une solution de (ε_n) sur]0,+∞[, linéairement indépendante de L_n.

a) Justifier l'existence de Z et établir l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que L_n ne s'annule pas sur]0,α[.

b) Sur]0,α[, on pose $U = \frac{Z}{L_n}$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par U sur]0,α[et en déduire qu'il existe un réel K non nul tel que $U'(t) \sim \frac{K}{t}$ au voisinage de 0 à droite.

Etudier la limite de U(t) quand t tend vers 0^+.

3) Déterminer la dimension du **R**-espace vectoriel des solutions de (ε_n) sur [0,+∞[.

4) Soit (a,b) ∈ $\mathbf{R}^2$ avec 0 < a < b. On considère Z_1 et Z_2 deux solutions linéairement indépendantes de (ε_n) sur]0,+∞[et on suppose :

$$\begin{cases} Z_1(a) = Z_1(b) = 0 \\ Z_1 \text{ ne s'annule pas sur }]a,b[\end{cases}$$

Montrer que Z_2 s'annule une et une seule fois sur]a,b[. (On pourra utiliser la fonction $W = Z_1Z'_2 - Z_2Z'_1$ et calculer W').

5) Montrer que toute solution non nulle de (ε_n) sur]0,+∞[s'annule un nombre fini de fois dans]0,+∞[.